

Matematika B3, BME TTK mérnök-fizikus szak, 2. zh. 80 perc. 2006. december 1. A

1. Vizsgálja az
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + ay \\ \dot{y} &= x + 3y\end{aligned}$$
 autonóm differenciálegyenlet-rendszert (a valós paraméter). Vázolja fázisképét az $a = -1$, $a = 1$, illetve az $a = 16$ esetekben. Oldja meg az $x(0) = 0, y(0) = 1$ kezdeti érték feladatát az $a = 0$ paraméter értékre a Laplace transzformáció segítségével. /6 pont/
2. Tanulmányozza az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $\dot{x} = y = \dot{z} = 0$ megoldása Ljapunov stabilitását.
 $\dot{x} = -3\sin x + xy^2 \tan z - 2ye^x + \sinh z$, $\dot{y} = -7 \tan x - 8y + \sinh z$, $\dot{z} = 4 \ln(1+x) + 4 \arcsin y - 3z$. /4 pont/
3. Legyen egy f deriválható komplex függvény valós része $u(x, y) = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}$. Határozzuk meg a képzetes részt, ha tudjuk, hogy $f(-i) = 1$. Számolja ki a $\oint_{\gamma} f(z) dz$ görbementi integrál értékét, ha $\gamma: |z| = 1$. Határozza meg a $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\}$ tartomány képét az f leképezésnél.
/ $f(D) = ?$ /6 pont/
4. Számítsa ki az $\cosh(i\pi) + \ln(-e) + (\sqrt{3} - i)^6 + \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ kifejezés pontos értékét. /4 pont/

Sok szerencsét!