GPK Matematika Szigorlat (2017. tavasz)

Kiegészítő témakörök, mintapéldák a 2017. februárjában közölt közölt minta vizsgasorokhoz).

Többváltozós függvények lokális, globális, feltételes szélsőértéke.

1. példa.

Legyen $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-y}$. (i) Keresse meg a stacionárius pontokat, határozza meg típusukat. (ii) határozza f maximumát, minimumát, ha (x,y) eleme a $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le 16\right\}$ tartománynak (2 módszerrel: a határ paraméterezése, feltételes szélsőérték). (iii) Létezik globális maximum, minimum ha $(x,y)\in R^2$?

2. példa.

Keresse meg a $D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2=4\right\}$ halmaz legközelebbi pontját a $P=(3,4,5)$ ponthoz (2 módszerrel (i) elemi geometria, (ii) feltételes szélsőérték). Mennyi a távolság?

Megoldások.

1.(i). Minimum ha $(x,y)=(0{,}0)$. nyereg, ha $(x,y)=(0{,}2)$. (ii) Minimum ha $(x,y)=(0{,}0)$, maximum ha $(x,y)=(0,-4)$. (iii) Globális maximum nincs, globális minimum 0 , ha $(x,y)=(0{,}0)$.

2. A legközelebb pont $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$. A távolság 3.

Taylor - Maclaurin, Fourier polinomok, sorok

1. példa.

Legyen $y(x)=\cos^2 x$. (i) Írja fel az y függvényt trigonometrikus polinom alakban. Számítsa ki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x)dx$ integrál értékét. (ii) Írja fel az y függvény 4. fokú Maclaurin polinomját (Taylor $x_0=0$ -ra). (iii) Keresse meg a legalacsonyabb rendű állandó együtthatós homogén lineáris közönséges differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x)=\cos^2 x$ függvény. Írja fel az egyenlet általános megoldását.

Megoldások.

1. 1.(i). $y(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x)dx=\frac{\pi}{4}$. (ii) $y(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=1-x^2+\frac{x^4}{3}$. (iii) $y(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. $\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm 2i$. $y'''+4y'=0,\ y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$.