

Többszörös Analízis Fizikusoknak. Előadások óránkénti bontásban. 2016. tavasz.

Irodalom: THOMAS-féle KALKULUS 3. Typotex. ISBN 978 963 9664 28 9. Ingyen elérhető elektronikus változatban: http://www.interkonyv.hu/konyvek/Thomas_kalkulus_3.

1.(2016-02-16).

Bevezetés (skalárterek – többszörös függvények, térgörbék-síkgörbék, felületek, vektoranalízis, komplex függvények).

Skalárterek. Deriválás általános (invariáns) esetben.

Kétszörös valós függvények. Grafikon, szintvonalak. Descartes, polár koordináták. Deriválás (parciális, totális, kapcsolatukra vonatkozó tételek bizonyítással, ellenpélda). Gradiens, Nabla írásmód. Magasabb deriváltak – vegyes parciális deriváltak felcserélhetősége (bizonyítás nélkül).

Példák. $f(x,y)=1-x-y$, $(1-x^2-y^2)^{1/2}$, x^2+y^2 , x^2-y^2 , $1/(x^2+y^2)^{1/2}$.

2. (2016-02-18).

Taylor polinom. Érintősík.

Szélsőérték problémák (lokális, globális - kompakt halmazon). $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ vizsgálata (lokális szélsőérték, $x^2+y^2\leq 4$ halmazon a határ paraméterezésével).

Házi feladat (opcionális): **Thomas 3, 14.1** 11, **14.3** 43, **14.7** 17, 35.

3. (2016-02-23).

Deriválási szabályok (láncszabály). Iránymenti derivált. A gradiens 2 szemléletes jelentése.

Feltételes szélsőérték ($\max/\min f(x,y)=?$, $g(x,y)=0$). $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ vizsgálata az $x^2+y^2=4$ halmazon.

Inverz, implicit függvény tétel (megkezdés).

4. (2016-02-25).

Inverz, implicit függvény tétel (folytatás). Feltételes szélsőérték (szükséges feltétel $g(x,y)=0$, $\partial f/\partial x=0$, $\partial f/\partial y=0$ bizonyítása).

Szélsőérték kompakt halmazon. Példa: $f(x,y)=x^2+y^2-2y-2x$ az $x=0$, $y=0$, $x+y=3$ egyenesek által határolt kompakt tartományon.

Normál tartomány. Kettős integrál. Példa: V : $0<x<1$, $0<y<1-x$, $0<z<1-x-y$ térfogat kiszámítása (kétféleképpen, elemi, integrálás).

Házi feladat (opcionális): **Thomas 3, 14.7.** 33, **14.8.** 1.

5. (2016-03-01).

Kettős integrál. Normál tartomány – felcserélhetőség. Példa – $f(x,y)=y \exp(-x^2)$, D : $0<y<1$, $y^2<x<1$.

Helyettesítés (általános eset, polár koordináták). Példa: $f(x,y)=(1-x^2-y^2)^{1/2}$, D : $x^2+y^2<1$.

Improprius integrálok. Példa - $f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$, D : $0<x,y<\infty$.

A kettős integrál alkalmazásai (terület, térfogat, változó sűrűségű lemez tömege, tömegközéppontja, tehetetlenségi nyomatéka). Példa – $f(x,y)=x^2+y^2$, D : $x^2+y^2<1$.

6. (2016-03-03).

Kettős integrál. Néhány további megjegyzés (polár koordinátákra áttérés szemléltetése, tartományok területe, néhány alkalmazás). Példák: Az $y=2x$, $y=x^2$ görbék által határolt kompakt halmaz területe, a D : $0<x<3$, $0<y<3-x$; $0<x<3$, $0<y<\sqrt{9-x^2}$ homogén lemezek tömegközéppontja.

Három- és többváltozós függvények. Szintfelület. Deriválás. Taylor polinom. Lokális szélsőérték szükséges, elégséges feltétele. Sylvester kritérium.

7. (2016-03-08).

Három- és többváltozós függvények. Szélsőérték kompakt halmazon.

Implicit függvény tétel, inverz függvény tétel általános esetben.

Feltételes szélsőérték (paraméterezés, Lagrange-féle multiplikátorok).

Hármas integrál Descartes koordinátákban. Helyettesítés (henger koordináták). Példa: gúla, kúp térfogata.

8. (2016-03-10).

Helyettesítés (gömbi koordináták). A gömb térfogata.

Hármas integrál alkalmazásai (térfogat, változó sűrűségű testek tömege, tömegközéppontja, tehetetlenségi nyomatéka).

Példamegoldás:

(i) Feltételes szélsőértékre (az $x+y=6$, $y+2z=12$ síkok metszéspontjának távolsága az origótól).

(ii) Gömbbel metszett kúp térfogata (kétféleképpen - henger, gömbi koordináták).

(iii) Improprius hármas integrálok számítása (felajánlva otthonra)

9. (2016-03-17).

Minta zárthelyi dolgozat megoldása.

10. (2016-03-22).

Vektor értékű függvények. Térgörbék. Ívhossz szerinti paraméterezés. Frenet-formulák. Görbület, torzió. A görbeelmélet alaptétele (bizonyítással). A számítások elvégzése (áttérés ívhossz szerinti paraméterezésre, érintő, normális, binormális egységvektorok, görbület, torzió) a csavarvonalra.

11. (2016-03-24).

1. zárthelyi dolgozat.

12. (2016-03-24).

Görbület, torzió számítása tetszőleges paraméterezés esetén. A csavarvonal görbületének, torziójának kiszámítása e módszerrel. Síkgörbe görbülete.

Felületek, mint függvények. Bevezetés. Felületek felszíne (általános alak, $z=f(x,y)$ alak).

Példa (a gömb felszíne).

13. (2016-03-29).

Vektor-vektor függvények. Szemléltetési módok. Derivált tenzor és invariánsai (divergencia, rotáció). Nabla operátor. Példák deriválásra ($\frac{d}{dr}(u(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r})) = \mathbf{v} \cdot \text{gradu} + u \frac{d\mathbf{v}}{dr}$; $\text{div}(u(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r})) = \mathbf{v} \cdot \text{gradu} + u \text{div} \mathbf{v}$; $\text{div}(\mathbf{r}^2 \mathbf{r}) = 5 \mathbf{r}^2$).

14. (2013-03-31).

Nabla operátor kétszeres alkalmazása. A $\text{divgradu} = \Delta u$, $\text{rotgradu} = 0$ részletesen, a többi vázlatosan.

Vonalintegrál (definíció, példák – gravitáció, $\arctan(y/x)$). A görbe ívhossza.

Felületi integrál (definíció). A felület felszíne.

15. (2016-04-05).

Integrál átalakítási tételek. Általános Stokes kimondása. Gauss-Osztrogradszkij, Stokes, Potenciál elmélet, mint speciális eset kimondása a nabla operátor segítségével. Potenciálmélet (bizonyítás: potenciális, konzervatív, rotációmentes vektormezők).

16. (2016-04-07).

Potenciálmélet (bizonyítás befejezése). Módszerek a potenciálfüggvény meghatározására. Divergencia és rotációmentes vektormezők. Az $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ harmonikus függvény. További tételek (Green). Stokes tétele síkbeli vektormezők esetére.

17. (2016-04-12).

Komplex számok fogalma, komplex algebra összefoglalása. Komplex függvény deriválása. Cauchy-Riemann egyenletek. Harmonikus társkeresés ($v(x,y)=2xy$). A derivált szemléletes tartalma, konformis leképezések. Példák: $f(z)=iz$, z^2 , $1/z$, z konjugált – a kettő sugarú kör első sík negyedbe eső részének a képe.

18. (2016-04-14).

Elemi komplex függvények ($\exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos$, stb.) sorfejtés, valós, képzetes rész, tulajdonságok. Komplex integrál. Deriválható komplex függvények integrálja. Cauchy tétel, Cauchy formula.

19. (2016-04-19).

A deriválható komplex függvények analitikusak (bizonyítással). Egész komplex függvények. Korlátos egész függvény konstans. Az Algebra alaptételének bizonyítása. Példa a Cauchy formula használatára integrálok kiszámításához ($1/(1+x^2)$ a valós tengelyen). Egyértelműségi tétel (konvergens sorozat pontjaiban megadott komplex függvények).

20. (2016-04-21).

Laurent-sor. Komplex függvények Laurent sorba fejtése. Komplex függvények izolált szingularitásai (megszüntethető, pólus, lényeges). Reziduum tétel. Reziduum kiszámítása egyszerű pólus esetén.

21. (2016-04-26).

Reziduum tétel. Reziduum kiszámítása pólus esetén. Komplex lineáris törtfüggvények meghatározása 3 pont képe alapján, körök, egyenesek képei (szintén körök, egyenesek). A $\sin x/x$ integráljának kiszámítása a valós tengelyen az $\exp(iz)/z$ függvény segítségével.

22. (2016-04-28).

Minta zárthelyi dolgozat megoldása.

23. (2016-05-03).

További feladatmegoldás a komplex függvénytan témájában. Függvény sorozatok, sorok. Pontonkénti, egyenletes, abszolút konvergencia. Tételek egyenletesen konvergens sorozatokra, sorokra (folytonosság, deriválhatóság, integrálhatóság).

24. (2016-05-05).

2. zárthelyi dolgozat.

25. (2016-05-05).

Függvénysorok. Abszolút, egyenletes konvergencia. Weierstass kritérium.

Hatványsorok. Konvergencia sugár, deriválás, integrálás. Közelítő számítások. Taylor, Maclaurin sorok.

26. (2016-05-10).

Hatványsorok. Határértékek kiszámítása.

Trigonometrikus polinom alakra hozás (trigonometrikus, exponenciális azonosságok felhasználásával). Fourier sorok. Együtthatók meghatározása (L^2 , C^2 terekben).

27. (2016-05-12).

$f(x)=x^2$, $f(x)=\text{sign}(x)$, $f(x)=|x|$ Fourier sora. Nevezetes sorösszegek kiszámítása. Fourier sorok pontonkénti (Dini tétel), egyenletes (sorösszeg általánosítása, Fejér tétel), L^2 konvergenciája.

28. (2016-05-17).

Minta vizsgadolgozat megoldása.

29. (2016-05-19).

Összefoglalás. Szóbeli tételjegyzék áttekintése.