GPK, Matematika A3 2. zárthelyi dolgozat. 2018-05-07. 12:15. *Sok szerencsét!*

1. Tekintse a $\vec{v}(\vec{r}) = \left(\frac{2}{x} + y - z\right)\vec{i} + (x + 2y + 2z)\vec{j} + (3z^2 - x - \lambda y)\vec{k}$ vektormezőt.

a).Keresse meg λ azon értékét melyre a vektormező potenciálos. Határozza meg a potenciálfüggvényt. Ezen λ értékre számítsa ki a $\int_{\gamma_1} \vec{v}(\vec{r})d\vec{r}$ vonalintegrál értékét (kétféleképpen: (i) potenciál elmélet, (ii) a vonalintegrál definíciója), ha γ_1 az $A(+1,+1,0)$ és $B(+1,+2,+3)$ pontokat összekötő egyenes szakasz). *2+10+6=18%.*

b). $\lambda = +1$-re számítsa ki $\oint_{\gamma_2} \vec{v}(\vec{r})d\vec{r}$ értékét (kétféleképpen: a vonalintegrál definíciója, Stokes tétel), ahol γ_2 a $D = \left\{(x,y,z) \middle| x = 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le \sqrt{4 - y^2}\right\}$ negyed körlapot határoló görbe (a x tengely felől nézve pozitív irányítással). *7+7=14%*

2. Tekintse a $\vec{v}(\vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{k})^2 \vec{k} + \vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektormezőt. Határozza meg a $\oiint_{F_i} \vec{v}(\vec{r})d\vec{F}$, $i = 1, 2$ felületi integrálok értékét (a Gauss-Osztrogradszkij tétel, (ii) a felületi integrál definíciója), ha az F_1 felület a $V_1 : 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, illetve az F_2 felület a $V_2 : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$ zárt tartományok határai (a normálisok kifelé mutatnak). Rajzolja le a tartományokat. *2*(6+3)=18%.*

Megoldások

1. a). $\lambda = -2$. $u(\vec{r}) = 2\ln x + xy - xz + y^2 + 2yz + z^3$. $\int_{\gamma_1} \vec{v}(\vec{r})d\vec{r} = 40$. b). $\oint_{\gamma_2} \vec{v}(\vec{r})d\vec{r} = -3\pi$.

2. $\oiint_{F_1} \vec{v}(\vec{r})d\vec{F} = \frac{5\pi}{2}$, $\oiint_{F_2} \vec{v}(\vec{r})d\vec{F} = \frac{11\pi}{6}$.