Matematika szigorlat, BME GPK. 2017. 05. 23. 12:00. 90=15+75 perc. AudMax. 100%. *Sok szerencsét!*

*Elmélet (3*5=15%.)* Kérjük magyarázza állításait. Segédeszközök használata nem engedélyezett.

1. Definiálja a cosh (koszinusz hiperbolikusz) függvényt. Rajzolja le a grafikonját, adja meg deriváltját, írja fel Maclaurin (Taylor $x_0 = 0$–ra) sorát.

2. A gömbkoordináták definíciója. Jacobi determináns gömbkoordinátákra.

3. Mi egy vektortér divergenciája, rotációja?

Példák (8+2+7+2+1)+(8+8+4)+(20+10+15)=85%. papír alapú segédeszközök megengedettek.

1.Találja meg a $\frac{dy}{dx} = -2y^2 x$, $y(0) = 2$, és $y(2) = 0$ kezdeti érték problémák $y = y(x)$ megoldásait. Ellenőrizze őket. Vizsgálja (grafikon lerajzolásával) a függvényeket.

2.Keresse meg a $D = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 1\}$ halmaz legközelebbi pontját a $P = (2,2,3)$ ponthoz (kétféleképpen: elemi geometria, feltételes szélsőérték). Mekkora a távolság? *8+8+4=20%*

3. Tekintse a $\vec{v}(\vec{r}) = (2x - z)\vec{i} + (-2y - z)\vec{j} + (3z^2 + \lambda x + \lambda y)\vec{k}$ vektormezőt.

(i) Keresse meg λ azon értékét melyre a vektormező potenciálos. Határozza meg a potenciálfüggvényt. Ezen λ értékre számítsa ki a $\int_\gamma \vec{v}(\vec{r})d\vec{r}$ vonalintegrál értékét (kétféleképpen: potenciál elmélet, az integrál definíciója), ha γ az *A(1,2,3)* és *B (0,2,4)* pontokat összekötő egyenes szakasz. *4+8+8=20%.*

(ii) λ=0-ra számítsa ki $\oint_\gamma \vec{v}(\vec{r})d\vec{r}$ értékét, ha $\gamma : x = 0,\ y = 2\cos t,\ z = 2\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$ (kétféleképpen: definíció, Stokes tétel). *5+5=10%*

(iii) Határozza meg a $\iint_F \vec{v}(\vec{r})d\vec{F}$ felületi integrál értékét, ha a zárt felület az alábbi tartomány határa (a normális kifelé mutat): $V:\ -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. *15%*

Megoldások.

1.Az általános megoldás $y \neq 0$ esetén $y = \frac{1}{x^2 + c}$ *8%.* Innen az $y(0) = 2$ kezdeti érték feladat megoldása $y = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}$ *2%.* A függvénynek nincs zérushelye, maximuma van a $x = 0$-ban, inflexiós pontok $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ *7%.* Az $y(2) = 0$ kezdeti érték feladat megoldása az $y(x) \equiv 0$ függvény. *2+1=3%.* Összesen *8+2+7+2+1=20%.*

2. A legközelebbi pont $Q = (0,0,1)$. *8+8=16%.* $PQ = \sqrt{12}$. 4%

3.(i). $\lambda = -1,\quad u(x,y,z) = x^2 - xz - y^2 - yz + z^3$. $\int_\gamma \vec{v}(\vec{r})d\vec{r} = 37$. *4+8+8=20%*

(ii) $rot\vec{v}(\vec{r}) = \vec{i} - \vec{j}$, $\oint_\gamma \vec{v}(\vec{r})d\vec{r} = 4\pi$. *5+5=10%*

(iii) $\iint_F \vec{v}(\vec{r})d\vec{F} = \pi$. Ha a Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével történik a számolás (henger koordinátákban), akkor $\iint_F \vec{v}(\vec{r})d\vec{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-1+r} 6z\, r\,dz\,d\varphi\,dr = \pi$. *15%*