Matematika szigorlat, BME GPK. 2017. 12.19. 8:00. 90=15+75 perc. AudMax. 100%. *Sok szerencsét!*

<u>*Elmélet*</u> *(5+5*2=15%.)* Kérjük magyarázza állításait. Segédeszközök használata nem engedélyezett.

1. Az „ π " szám definíciója (legalább kétféleképpen). Az $\arctan$ (inverz $\tan$) függvény Maclaurin sora segítségével adjon közelítő eljárást π meghatározására.

2. Nevezzen meg 5 **francia** tudóst, aki jelentős matematikai kutatást is folytatott. Utaljon röviden matematikai eredménye (tétel, fogalom, stb.) lényegére.

<u>*Példák*</u> *20+10+30+25=85%.* papír alapú segédeszközök megengedettek.

1.Találja meg a $\dfrac{dy}{dx}=\sin^2(y)-1+x\cos^2(y)$ egyenlet $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$ és $y(1)=0$ kezdeti érték problémái megoldásait. Vizsgálja ezen függvényeket (értelmezési tartomány, értékkészlet, gyök, szélsőérték, inflexiós pont, aszimptota, grafikon, stb.). *10+10=20%*

2.Tekintse a $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\, 0\le x\le 2,\, 2-x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$ homogén $(\rho(x,y)\equiv const.)$ lemezt. Ábrázolja a tartományt, határozza meg tömegközéppontjának koordinátáit. *10%*

3. Tekintse a $\vec v(\vec r)=2\vec r+2(\vec k\cdot\vec r)\vec k+\lambda(\vec k\times\vec r),\ \vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ vektormezőt.

(i) Keresse meg λ azon értékét melyre a vektormező potenciálos. Határozza meg a potenciálfüggvényt. Ezen λ értékre számítsa ki a $\int_\gamma \vec v(\vec r)d\vec r$ vonalintegrál értékét (kétféleképpen: potenciál elmélet, az integrál definíciója), ha γ az $A(-1,1,2)$és $B(0,1,3)$pontokat összekötő egyenes szakasz. *10+5=15%.*

(ii) $\lambda=1$-re számítsa ki a Stokes tételben szereplő mindkét integrált (zárt görbe menti, felületi), ha a γ görbe a $D_2=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2\le 1,\, 0\le y,\, z=0\right\}$ halmaz határa. Ábrázolja D_2 -t. *10+5=15%*

4. Legyen $\vec v(\vec r)=x\vec i+\dfrac{z^2}{2}\vec k$. Számítsa ki a Gauss-Osztrogradszkij tételben szereplő mindkét integrált (felületi, térfogati) a $D_3=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, 0\le z\le 1,\, x^2+y^2\le 1\right\}$, illetve $D_4=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, 0\le z,\, x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ tartományokra (a határon a normális kifelé mutat). *(8+5)+(8+4)=25%*

Megoldások.

1. Szétválasztható egyenlet. $\dfrac{dy}{dx}=(x-1)\cos^2(y)$. Általános megoldás: (i) $\cos^2(y)=0\Rightarrow y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ megoldások. (ii) $y\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ esetén $y=\arctan\left(\dfrac{(x-1)^2}{2}+c\right)$ *2+8=10%.* Az $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$ kezdeti érték feladat megoldása $y(x)=\dfrac{\pi}{2}$. Az $y(1)=0$ kezdeti érték feladat megoldása $y(x)=\arctan\left(\dfrac{(x-1)^2}{2}\right)$ Zérus hely $x=1$, minimum $x=1$, inflexiós pontok $x=1\pm\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}$, aszimptota $y=\dfrac{\pi}{2}$. *1+9=10%.* Összesen *10+10=20%.*

2. $x_c=y_c=\dfrac{4}{3\pi-6}$. *2+6+2=10%*

3. $\vec v(\vec r)=2\vec r+2(\vec k\cdot\vec r)\vec k+\lambda(\vec k\times\vec r)=(2x-\lambda y)\vec i+(2y+\lambda x)j+(4z)\vec k$.

(i). $\lambda=0,\quad u(\vec r)=\vec r^{\,2}+(\vec k\cdot\vec r)^2=x^2+y^2+2z^2$. $\int_\gamma \vec v(\vec r)d\vec r=9$. *10+5=15%.*

(ii) $rot\vec v(\vec r)=2\vec k$, $\oint_\gamma \vec v(\vec r)d\vec r=\pi$ - ha a z tengely irányából + körüljárású a görbe. *(5+5)+5=15%.*

4. $div\vec v(\vec r)=1+z.\quad \oiint_{F_3}\vec v(\vec r)d\vec F=\pi+\dfrac{\pi}{2}=0+\dfrac{\pi}{2}+\pi=\dfrac{3}{2}\pi.$ *(8+5=13%* $\oiint_{F_4}\vec v(\vec r)d\vec F=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=0+\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{11}{12}\pi$.

(8+4)=12%. Összesen *(8+5)+(8+4)=25%*