TTK, Matematikus alapszak

Differenciálegyenletek 1 (BMETE93AM15**)**

Elhangzott gyakorlati tananyag óránkénti bontásban. Mindkét csoport. Rövidítve.

1. gyakorlat

2017. szeptember 7. T01. csoport.
Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek kezdeti érték problémáinak megoldása, a kapott függvény grafikonjának ábrázolása.
Lineáris egyenlet. $xy' = 3y + x^2$, $y(0) = 0$. Megoldás $y = x^3 - x^2$.

Szétválasztható egyenlet. $y' = 2x\cos^2 y$, $(i)\ y(0) = 0, (ii)\ y(0) = \frac{\pi}{2}$. Megoldások $(i)\ y = \arctan x^2$, $(ii)\ y = \frac{\pi}{2}$.

Ortogonális, izogonális trajektóriák. Elmélet, példák. $(i)\, y = cx \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2$, $(ii)\ y = \frac{c}{x} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c$.

2017. szeptember 11. T02. csoport.
Lineáris egyenlet. $y'\cos x + y\sin x = 1$, $y(0) = 0$. Megoldás $y = \sin x$.
Szétválasztható egyenlet. $y' = -2xy^2$. $(i)\ y(0) = 1$, $(ii)\ y(0) = 0$ Megoldások $(i)\ y = \frac{1}{1+x^2}$, $(ii)\ y = 0$
Ortogonális, izogonális trajektóriák. Elmélet, példák. $(i)\ \ y = cx^2 \Leftrightarrow x^2/2 + y^2 = c^2$. $(ii)\ \ y = \ln(cx) \Leftrightarrow y = -x^2/2 + c$.

2. gyakorlat

2017. szeptember 14. T01. csoport.
Az (x+y)y'=y egyenlet megoldása. Homogén fokszámú, μ(y) alakú multiplikátor – részletesen. Utalás: lineáris y független változóval, általában is ez a lineáris egyenlet multiplikátora, innen a megoldó képlet levezethető.
Közelítő módszerek: $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$. Newton (harmadfokú tagig), Picard (második közelítés), Euler (0.5 lépésköz).

2017. szeptember 18. T02. csoport.
A lineáris elsőfokú változó együtthatós egyenlet megoldó képletének levezetése (multiplikátor módszerrel visszavezetés egzakt egyenletre.
Az (x-y)y'=y egyenlet megoldása (homogén fokszámú, μ(y) alakú multiplikátor).
Közelítő módszerek: $y' = 1 - x^2 - y^2$. Newton (harmadfokú tagig), Picard (második közelítés).

3. gyakorlat

2017. szeptember 21. T01. csoport.
Elsőrendű autonóm egyenletek. Pályagörbék (inflexiós pontokkal), jellegzetes integrálgörbék. $y' = 4y - y^3$. $y' = \sin y$. Megoldás szétválaszthatóként.
Másodrendű egyenletek. Állandó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Az inhomogén egyenlet megoldása a próbafüggvény módszerrel. $y'' + 2y' + y = x + 4\sinh x + \sin x$.

2017. szeptember 25. T02. csoport.
Elsőrendű autonóm egyenletek. Pályagörbék (inflexiós pontokkal), jellegzetes integrálgörbék. $y' = \sin 2y$. Megoldás szétválaszthatóként. $y' = y^3 + y^2 - 2$.
Másodrendű egyenletek. Állandó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Az inhomogén egyenlet megoldása a próbafüggvény módszerrel. $y'' - 4y' + 5y = 5x + 40\sin x + 10e^{-x}$.

4. gyakorlat

2017. szeptember 28. T01. csoport.
$y'' + y' = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$ egyenlet megoldása (sokféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós másodrendű, (ii-iii-iv) visszavezetés y-tól nem függő elsőrendűre. és annak megoldása szeparábilis, lineáris állandó, illetve változó együtthatósként, (v) Laplace transzformáció, (vi) Newton módszer, (vii) Utalás további lehetőségekre (állandók variálása, integrálegyenlet, x-től nem függő hiányos).

2017. október 2. T02. csoport.
$y'' + y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ egyenlet megoldása (kitalálás + 4 féleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós másodrendű, (ii) Laplace transzformáció, (iii) Newton módszer), (iv) visszavezetés elsőrendűre.

5. gyakorlat

2017. október 5. T01. csoport.
Euler egyenlet (kétféleképpen: visszavezetés állandó együtthatósra, a homogén megoldásának keresése x - hatvány alakban). $x^2y''-3xy'+3y=x^2$ egyenlet általános megoldása.
Változó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Redukció a homogén nem triviális megoldása ismeretében. Az inhomogén megoldása az állandók variálásával. Példa az előző Euler egyenlet.

2017. október 9. T02. csoport.
Euler egyenlet (kétféleképpen: visszavezetés állandó együtthatósra, a homogén megoldásának keresése x - hatvány alakban). $x^2y''+3xy'+2y=10x^2$ egyenlet általános megoldása.
Változó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Redukció a homogén nem triviális megoldása ismeretében. Az inhomogén megoldása az állandók variálásával. $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^x$.

6. gyakorlat

2017. október 12. T01. csoport.
Síkbeli állandó együtthatós homogén lineáris rendszerek megoldása. Nyereg, csomó esetére példák. $\begin{array}{l}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-2x+ay\end{array}$, $a=-3,+3$. $\begin{array}{l}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+ay\end{array} \Leftrightarrow \ddot{x}+a\dot{x}+1=0$. $a=0$ eset részletesen tárgyalva (visszavezetés másodrendű egyenletre).

2017. október 12. T02. csoport.
Síkbeli állandó együtthatós homogén lineáris rendszerek megoldása. Nyereg, csomó, fókusz (komplex sajátérték – sajátvektor alapján valós megoldás). $\begin{array}{l}\dot{x}=4x-ay\\ \dot{y}=-9x+4y\end{array}$, $a=-1,+1,+4$.

7. gyakorlat

2017. október 19. T01. csoport.
Centrum, fókusz. $\begin{array}{l}\dot{x}=\alpha x-\beta y\\ \dot{y}=\beta x+ay\end{array}$ átírása polár koordinátákra. 6 eset megnevezése.
Poincaré-Bendixson lokális elmélete. Példa a populációelméletből (ragadozó-zsákmány modell): $\begin{array}{l}\dot{x}=-x+xy\\ \dot{y}=2y-y^2-xy\end{array}$.

8. gyakorlat

2017. október 26. T01. csoport.
A variációszámítás alapfeladata. Bevezetés. Euler egyenlet.
Másodrendű lineáris változó együtthatós egyenlet. Homogén megoldása egy nem triviális megoldás ismeretében. Partikuláris megoldás megkeresése (az egyenlet és rendszer eredmények összehasonlítása).

2017. október 30. T02. csoport.
Centrum, fókusz. $\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha r\\ \dot{\varphi}=\beta\end{array}$ vizsgálata, 6 eset megnevezése. Visszatérés Descartes koordinátákra $\begin{array}{l}\dot{x}=\alpha x-\beta y\\ \dot{y}=\beta x+ay\end{array}$. Átviteli elv – harmonikus oszcillátor.
Poincaré-Bendixson lokális elmélete. Példa a populációelméletből (versengő kizárás modell):
$$\begin{array}{l}\dot{x}=x(-1+4z)\\ \dot{y}=y(-1+2z).\\ z=1-x-y\end{array}$$

9. gyakorlat

2017. november 6. T02. csoport.

Másodrendű lineáris változó együtthatós egyenlet. Homogén megoldása egy nem triviális megoldás ismeretében. Partikuláris megoldás megkeresése az állandók variálásával.
$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y \\ \dot{y} &= \mu y\end{aligned}$ rendszer (kétszeres gyök) vizsgálata különböző módszerekkel (visszavezetés másodrendűre, Laplace transzformáció). Fáziskép meghatározása.

2017. november 9. T01. csoport.
Ljapunov stabilitás a lineáris közelítés alapján. Példa: „Vizsgálja egy differenciál-egyenletrendszer triviális megoldása ($x = y = z = 0$) Ljapunov stabilitását (kétféleképpen: (i) Routh-Hurwitz kritérium, (ii) a karakterisztikus egyenlet gyökeinek kiszámítása)".
Bevezetés a Ljapunov függvények elméletébe (rendszer értelmében vett derivált, Ljapunov aszimptotikus stabilitási tétele - + definit Ljapunov függvény – definit deriválttal).
Szemléltetés: $\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x + y \\ \dot{y} &= -x + \alpha y\end{aligned}$, $\alpha = 0$, $\alpha = -1$.

10. gyakorlat

2017. november 13. T02. csoport.
Ljapunov stabilitás a lineáris közelítés alapján. Példa: „Tanulmányozza az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $x = y = z = 0$ megoldása Ljapunov stabilitását.
$\dot{x} = \ln(z+1) - \sin x,\ \dot{y} = -3\operatorname{sh} y + x^2 + 2z,\ \dot{z} = -x + 1 - e^z$."
A gőzgép (Watt-féle regulátorral) matematikai modelljének stabilitásvizsgálata a lineáris közelítés alapján. Történeti visszatekintés, magyarázat stabilitásvesztési problémákra a XIX. század végén.

11. gyakorlat

2017. november 20. T02. csoport.
A kezdeti értékektől való differenciálható függés. Variációs rendszer (bizonyítás nélkül).
Példa: Egy az űrhajóról eldobott tárgy mozgásának vizsgálata az előbbi elmélet alapján.

2017. november 23. T01. csoport.
A kezdeti értékektől való differenciálható függés. Az inga egyensúlyi helyzeteihez tartozó variációs rendszerek felírása, megoldása, fázisképek lerajzolása.
Az előadáson tárgyalt minta zárthelyi dolgozat további vizsgálata.

12. gyakorlat

2017. november 30. T01. csoport.
A hővezetés differenciálegyenletének levezetése. Egydimenziós eset megoldása (termosz, változók szétválasztása – Fourier módszer).

13. gyakorlat

2017. december 4. T02. csoport.

A bifurkáció elmélet alapjai. Egydimenziós autonóm egyenletek tipikus bifurkációja (nyeregcsomó). Nem tipikus bifurkációk kis perturbációval szétesnek.

2017. december 7.
Pót zárthelyi dolgozatok.