

Differenciálegyenletek 1. Vizsga, BME TTK. 2018. 01. 16. 10:00. 90 perc. CHFMax.
60%. Sok szerencsét!

Elmélet (4*2,5=10%.) Kérjük magyarázza állításait. Segédeszközök használata nem engedélyezett.

Nevezzen meg 4 a **B, A, C, H** betűk valamelyikével kezdődő vezetéknevű tudóst, aki jelentős matematikai kutatást is folytatott a Differenciálegyenletek tárgy témájában. Utaljon röviden matematikai eredménye (tétel, fogalom, stb.) lényegére.

Példák 12+4+20+12+2=50%. papír alapú segédeszközök megengedettek.

1. Találja meg a $y' = (3x^2 - 4)e^{x^3 - 4x - y}$ egyenlet általános megoldását. Oldja meg az $y(2) = 0$ kezdetiérték-feladatot. Ellenőrizze. Vizsgálja ezen függvényt (értelmezési tartomány, értékkészlet, gyök, szélsőérték, inflexiós pont, grafikon, stb.). 6+6=12%.

2. Tekintse az $y' = y^3 - 4y$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat). 2+2=4%

3. Keresse meg az $\dot{x} = -2y, 2\dot{y} = x - 2$ differenciálegyenlet-rendszer $x(0) = 4, y(0) = 0$ kezdetiérték-feladatának megoldását négyféleképpen: (i) az egyenletrendszer visszavezetése egyenletre, (ii) lineáris állandó együtthatós egyenletrendszer – mátrix módszer, (iii) Laplace transzformáció), (iv) Newton- módszer (a harmadfokú tagokig). Rajzolja le ezen megoldás pályáját. Milyen görbéről van szó? 6+3+3+3+5=20%.

4. Oldja meg az $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$ elsőrendű differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti érték problémáját. Vizsgálja ezen függvényt (értelmezési tartomány, értékkészlet, gyök, szélsőérték, inflexiós pont, grafikon, stb.). 6+6=12%.

5. Írjon fel egy nemlineáris differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = \tan x$ függvény. 2%

Megoldások.

1. Szétválasztható egyenlet. Általános megoldás: $y = \ln(e^{x^3 - 4x} + c)$. A kezdetiérték-feladat megoldása $y(x) = 2x + 1 - e^{2x}$. Páratlan függvény. Zérus helyek $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$. Lokális maximum, minimum $x_{4,5} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Inflexiós pont $x_6 = 0$. 6+6=12%.

2. Egyensúlyi helyzetek: $y_1 = 0$ (stabilis), $y_2 = -2, y_3 = 2$ (instabilisek). Integrálgörbék: $y = -2, y = 0, y = 2$ állandó megoldások. Inflexiós pontok $y_{4,5} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. 2+2=4%

3. A kezdetiérték-feladatának megoldása $x = 2 + 2\cos t, y = \sin t$. 6 (az első jó megoldásért, bármelyik módon)+3+3+3 (a többi jó megoldásért) =15%. A pályagörbe az $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ ellipszis. 5%. Összesen 15+5=20%

4. Egzakt egyenlet. Általános megoldás: $xe^y - y = c$. A kezdetiérték-feladat megoldása $x(y) = ye^{-y}$. Zérus hely $y = 0$. Maximum $y = 1$. Inflexiós pont $y = 2$. Megjegyzés: vizsgálható a megoldás $y = y(x)$ függvény alakban is. 6+6=12%.

5. Ilyen például az $y' = 1 + y^2$ egyenlet. 2%