Differenciálegyenletek 1. Vizsga, BME TTK. 2018. 01. 09. 10:00. 90 perc.
CHFMax. 60%. *Sok szerencsét!*

*Elmélet (4*2,5=10%.)* Kérjük magyarázza állításait. Segédeszközök használata nem engedélyezett.

Nevezzen meg 4 **brit** vagy **skandináv** tudóst, aki jelentős matematikai kutatást is folytatott a Differenciálegyenletek tárgy témájában. Utaljon röviden matematikai eredménye (tétel, fogalom, stb.) lényegére.

Példák 20+6+6+6+12=50%. papír alapú segédeszközök megengedettek.

1. Keresse meg az $y''-3y'+2y=4(x-1)$ differenciálegyenlet $y(0)=0,\ y'(0)=0$ kezdeti érték problémájának megoldását háromféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) Laplace transzformáció), (iii) Newton- módszer (a negyedfokú tagokig). Vizsgálja a megoldásfüggvényt (teljes függvényvizsgálat). *7+3+4+6=20%*

2. Tekintse az $y'=2y+1-e^{2y}$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat). *3+3=6%*

3. Oldja meg az $y'-3y+2\int_0^x y(t)dt=2x^2-4x$, $y(0)=0$ integrálegyenletet (kétféleképpen: Laplace transzformáció, visszavezetés differenciálegyenletre). *3+3=6%*

4. Találja meg az $xy-y=c$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot. 3+*3=6%*

5. Vizsgálja az $\dot{x}=-4x-2y$, $\dot{y}=-2x-6y+2z$, $\dot{z}=2x-4y-6z$ lineáris differenciálegyenletrendszer triviális megoldása Ljapunov stabilitását (kétféleképpen: karakterisztikus egyenlet gyökei, Hurwitz kritérium). *8+4=12%*

Megoldások.

1. Általános megoldás $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x+1$. Kezdeti érték feladat $y=2x+1-e^{2x}$. *7%* az első, *3% a* második megoldásért (sorrend nem számít). Newton módszer $y(x)=-2x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4$. *3%.* A kezdetiérték-feladat megoldása $y(x)=2x+1-e^{2x}$. Zérus hely $x=0$, maximum $x=0$, nincs inflexiós pont, aszimptota $y=2x+1,\ x\to-\infty$. *6%* Összesen *20%*

2. Az egyenlet jobb oldala az előző feladatban szereplő függvény. Vizsgálatából látszik, hogy az egyetlen egyensúlyi helyzet az $y=0$ jobbról vonz, balra taszít. Az integrálgörbék negatív y-ra konkávok, pozitív y-ra konvexek, nincs inflexiós pontjuk. *4+4=8%*

3. Az egyenlet deriválás, illetve $y'(0)=0$ kezdeti érték meghatározásával visszavezethető az 1. példa egyenletére. A Laplace transzformálás is ugyanazt az egyenletet adja (p-vel átszorzás után). Így $y=2x+1-e^{2x}$. *5+3=8%*

4. Az ortogonális trajektóriák $(x-1)^2-y^2=c$. Mindkét görbesereg derékszögű hiperbolák. *4+3=7%*

5. Aszimptotikusan stabilis. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^3+16\lambda^2+88\lambda+160=0$, a gyökök $\lambda_1=-4,\ \lambda_{2,3}=-6\pm 2i$. (Megjegyzés: egyszerűbb a számítás, ha a mátrix elemeit leosztjuk 2-vel.) *8+4=12%*