

TTK, Matematikus alapszak

Differenciálegyenletek (Előadás BMETE93AM03; Gyakorlat BME TE93AM04)

Elhangzott tananyag óránkénti bontásban

2016. február 15. 1. előadás.

Közönséges differenciálegyenlet fogalma. A megoldás definíciója. Lemma az ekvivalens integrálegyenletről (bizonyítással). Példák: $dy/dx=0$, $dy/dx=y$, $dy/dx=1+y^2$, $dy/dx=3*y^{(2/3)}$. Közelítő megoldási módszerek (PICARD, EULER, NEWTON).

2016. február 17. 1. gyakorlat.

Közelítő megoldási módszerek (PICARD, EULER, NEWTON, izoklinák) bemutatása a $dy/dx=x^2+y^2-1$ egyenlet $y(0)=0$ kezdeti érték problémáján.

Elsőrendű autonóm egyenletek (bevezetés). Pályagörbék, integrálgörbék.

Házi feladat. Elolvasásra: Thomas 9.3, 9.4. Példák: 9.4. 3,8.

2016. február 18. 2. előadás.

A Lipschitz feltétel. Az egzisztencia és unicitás tétel bizonyítása (a Banach-féle fix pont tétel segítségével). Hasonló tételek (Peano, Cauchy) kimondása. A megoldás folytathatósága.

Elsőrendű autonóm egyenletek (folytatás). Pályagörbék, integrálgörbék.

2016. február 22. 3. előadás.

Gronwall-Bellman-Bihari lemma. Az unicitás tétel bizonyítása.

Egzakt differenciálegyenletek. Speciális eset: szétválasztható egyenletek. Példa: $dy/dx = -x/y$.

2016. február 24. 2. gyakorlat.

Egzakt differenciálegyenletek. Szétválasztható egyenletek. Szétválaszthatóra visszavezethető egyenletek (homogén fokszerű).

Ortogonalis, izogonalis trajektóriák.

Házi feladat. Elolvasásra, példák: Thomas 9.1, 9.5. Példák: 9.1. 17. (304. oldal), 9.5. 17. (331. oldal).

2016. február 25. 4. előadás.

Elsőrendű autonóm egyenletek (befejezés). Integrálás szétválasztható egyenletként.

Egzakt differenciálegyenletek. Multiplikátor módszer. Speciális eset: lineáris egyenlet megoldó képletének bizonyítása. Lineáris problémák, a megoldás struktúrája.

2016. február 29. 5. előadás.

Elsőrendű közönséges változó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldó képletének két másik bizonyítása (visszahelyettesítés, az állandó variálása).

Lineárisra visszavezethető egyenletek (Bernoulli).

n -dimenziós rendszerek. n -ed rendű egyenletek. n -ed rendű differenciálegyenletek visszavezetése n -dimenziós rendszerekre (az „Átviteli Elv”). Példa (harmonikus oszcillátor).

2016. március 2. 3. gyakorlat.

Az $(x+y)y'=y$ egyenlet megoldása 3-féle módszerrel (homogén fokszerű, $\mu(y)$ alakú multiplikátor, lineáris y független változóval).

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet - $\cos x y' + y \sin x = 1$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=c$.

Bernoulli egyenlet - $y^3(2y'+y)=x$.

Házi feladat. Thomas 9.2. 5,

2016. március 3. 6. előadás.

Másodrendű egyenletek. Példa $my''=mg$.

Hiányos másodrendű egyenletek (2 típus visszavezetése elsőrendűre).

Lineáris másodrendű egyenletek. A megoldás struktúrája. Homogén egyenlet, lineárisan független megoldások. Állandó együtthatós homogén egyenlet általános megoldása. Példa: $y''+y=0$.

2016. március 5. 7. előadás.

Állandó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Az inhomogén egyenlet megoldása a próbafüggvény módszerrel.

Euler egyenlet. Visszavezetés állandó együtthatósra.

2016. március 7. 4. gyakorlat.

Hiányos másodrendű egyenletek. Példák: $y''=y'/x+x\sin x$, $y''+y=0$.

Állandó együtthatós (inverz probléma is, megoldásból az egyenlet, $y=\cos^2$),

2016. március 9. 8. előadás.

A Laplace transzformáció. Állandó együtthatós egyenletek megoldása Laplace transzformáció segítségével.

2016. március 10. 9. előadás.

Változó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Redukció a homogén nem triviális megoldása ismeretében. Az inhomogén megoldása az állandók variálásával.

Magasabb rendű egyenletek.

A variációs számítás alapfeladata. Euler egyenlet. Másodrendű alak. Két pontot a síkon összekötő legrövidebb vonal.

2016. március 16. 5. gyakorlat.

Euler egyenlet (kétféleképpen: visszavezetés állandó együtthatósra, a homogén megoldásának keresése x - hatvány alakban).

Állandó együtthatós egyenletek (illetve arra visszavezethető integrálegyenlet) megoldása Laplace transzformáció segítségével.

Változó együtthatós lineáris másodrendű egyenletek. Redukció a homogén nem triviális megoldása ismeretében. Az inhomogén megoldása az állandók variálásával. Euler egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése az állandók variálásával (vázlatosan).

2016. március 17. 10. előadás.

Minta 1. zárthelyi dolgozat megoldása.

2016. március 21. 11. előadás.

Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek. Egzisztencia és unicitás tétel.

Lineáris változó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. A megoldás folytathatósága. Homogén eset. Alaprendszer, alapmátrix, Wronski determináns. Inhomogén eset. Egy partikuláris megoldás megkeresése az állandók variálásával. Megoldó képlet.

2016. március 23. 12. előadás.

Lineáris változó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. Példa: $d^2x/dt^2 + x = 0$ visszavezetve lineáris rendszerre. Liouville tétele. Az előbbi példa folytatása.

Lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. megoldási módszerek: (i) az A mátrix sajátértékei, sajátvektorai segítségével, (ii) mátrixfüggvények, $\exp(At)$ alapmátrix. Megoldó képlet.

2016. március 24. 6. gyakorlat.

1. zárthelyi dolgozat.

2016. március 30. 7. gyakorlat.

1. zárthelyi dolgozat feladatainak megoldása.

2016. március 31. 13. előadás.

Lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. megoldási módszerek: (iii) Hermite-féle interpolációs polinom. Többszörös gyökök esete.

Autonóm rendszerek. A pályák (trajektóriák) nem metszik egymást. Fáziskép fogalma.

Homogén állandó együtthatós síkbeli rendszerek megoldása. Fázisképek (Valós sajátértékek esete. Nyereg, csomópont. Komplex konjugált sajátértékek esete. Centrum, fókusz.)

2016. április 4. 14. előadás.

Nemlineáris síkbeli autonóm rendszerek. Lokális fázisképek. Poincaré tétele. Kolmogorov, Volterra-Lotka rendszerek. Ragadozó-zsákmány modell.

Kapcsolat az állandó együtthatós egyenletek, rendszerek között.

2016. április 6. 8. gyakorlat.

Inhomogén lineáris síkbeli autonóm rendszerek. Különböző megoldási módszerek (sajátérték-sajátvektor, $\exp(At)$, visszavezetés másodrendű egyenletre, Laplace-transzformáció). Fázisképek.

2016. április 7. 15. előadás.

Ljapunov stabilitás. Definíciók. Tétel (bizonyítással) stabilitás a lineáris közelítés alapján. Routh-Hurwitz kritérium (csak kimondás). Szükséges feltétel: a karakterisztikus egyenlet együtthatói azonos előjelűek.

2016. április 11. 9. gyakorlat.

Routh-Hurwitz kritérium (két-dimenziós rendszerekre bizonyítás, szükséges feltétel kimondása: a karakterisztikus egyenlet együtthatói azonos előjelűek).

Ljapunov stabilitás vizsgálata a lineáris közelítés alapján. A tétel, a Routh-Hurwitz kritérium alkalmazása példákon (köztük a gőzgép matematikai modellje).

2016. április 14. 16. előadás.

A kezdeti értékektől való folytonos függés. Bizonyítás (Gronwall-Bihari lemma).

A kezdeti értékektől való differenciálható függés. Variációs rendszer. Bizonyítás (C^2 feltétel mellett).

2016. április 18. 17. előadás.

1. pótló-javító zárthelyi dolgozat.

2016. április 20. 10. gyakorlat.

Ljapunov stabilitás, Ljapunov függvények, tételek síkbeli autonóm rendszerek példáin.

2016. április 21. 18. előadás.

A paraméterektől való differenciálható függés. Variációs rendszer.

Bevezetés a bifurkáció elméletbe. A nyereg-csomó bifurkáció. Tipikusság. A transzkritikus bifurkáció visszavetése tipikus rendszerre (nyereg-csomó, illetve nincs is bifurkáció).

2016. április 25. 19. előadás.

Differenciálegyenletek számítógépes megoldása (Dr. Tóth János előadásában – [az elhangzott anyag](#)).

2016. április 27. 11. gyakorlat.

Minta 2. zárthelyi dolgozat megoldása.

2016. április 28. 20. előadás.

Tipikus egy kodimenziós bifurkációk (nyereg-csomó, Andronov-Horf). Bifurkációs diagramok.

Strukturális stabilitás fogalma (autonóm differenciálegyenlet-rendszerek esetén).

Az egydimenziós eset teljes vizsgálata. A strukturálisan stabilis egyenletek osztályozása: páros számú (0, 2, 4, ...) nem kritikus egyensúlyi helyzet a körön. A strukturálisan stabilis egyenletek nyílt, mindenütt sűrű halmazt alkotnak a C^1 függvényterben.

2016. május 2. 12. gyakorlat.

További minta 2. zárthelyi dolgozat megoldása (hallgatói kérésre).

2016. május 3. 21. előadás.

Ljapunov függvények definíciója, definitása. Ljapunov stabilitási, egyenletes stabilitási tétele (bizonyítással). Ljapunov aszimptotikus stabilitási tétele (csak kimondás). Másodrendű lineáris egyenletek stabilitása.

2016. május 5. 22. előadás.

2. zárthelyi dolgozat.

2016. május 9. 23. előadás.

A 2. zárthelyi dolgozat példáinak megoldása.

2016. május 11. 13. gyakorlat.

Példa (az űrhajózás témaköréből) a variációs rendszer meghatározására, használatára. Közben többszörös sajátértékek esete lineáris állandó együtthatós rendszerekre.

2016. május 12. 24. előadás.

Ljapunov instabilitás. Instabilitási tételek (bizonyítással).

A macska automorfizmusa. Dinamikai rendszerek a síkon, tóruszon.

2016. május 18. 14. gyakorlat.

Minta vizsgasor megoldása.

2016. május 19. 25. előadás.

Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Másodrendű egyenletek osztályozása.

A hővezetés differenciálegyenlete. Fourier módszer.

2016. május 23. A 26. előadás idejében pótló, javító zárthelyi dolgozat.