

TTK, Matematikus alapszak, Differenciálegyenletek (előadás, gyakorlat)

Előadás BMETE93AM03; Gyakorlat BME TE93AM04. **Követelmény:** Előadás 4/0/0/v/4; Gyakorlat 0/020/f/2

Tananyag (általános megjegyzések).

A tantárgy fő célkitűzései (i) bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe, (ii) a linearizálás módszerének, alkalmazhatóságának megismertetése, (iii) az elsőrendű egyenletek, illetve az állandó együtthatós lineáris egyenletek, rendszerek készség szintű megoldásának elsajátítása.

A tantárgyi adatlapon megnevezett témakörök sorrendje kis mértékben megváltoztatva kerül felsorolásra. A tananyag a TVSZ-ben megengedett mértékben módosulhat, kiegészülhet.

Tankönyvek:

Tóth János, Simon L. Péter: Differenciálegyenletek (Typotex, 2005).

Az előadás V.I. Arnold: Közönséges differenciálegyenletek (Műszaki Könyvkiadó, 1987), illetve V.I. Arnold: A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei (Műszaki Könyvkiadó, 1988) matematikai szemléletét követi.

Egyes részek elsajátításához használható még a Thomas-féle KALKULUS 2. kötete (Typotex).

1. zh. 2015. október 15-án (csütörtökön).

Tananyag (tervezett):

Közönséges differenciálegyenletek: Explicit módon megoldható egyenlettípusok, egzakt és lineáris egyenletek. A kezdetiérték-probléma korrekt kitűzöttsége, egzisztencia, unicitás, folytonos függés a kezdeti értékektől. Lineáris egyenletrendszerek, variációs rendszer.

2. zh: 2015. november 26-án (csütörtökön) az előadás idejében.

Tananyag (tervezett):

A stabilitáselmélet elemei, stabilitás, aszimptotikus stabilitás, Ljapunov függvények, stabilitás a lineáris közelítés alapján. Síkbeli autonóm egyenletek fázisportréi. Periodikus megoldások. Közelítő megoldási módszerek.

13-14. hét. *Tananyag (tervezett):*

Elemi parciális egyenletek: Elsőrendű egyenletek, kapcsolat közönséges egyenletekkel, karakterisztikák módszere. Véges húr transzverzális rezgései: D'Alembert formula, Fourier módszer. Hővezetési egyenlet: Fourier módszer, diszkretizáció. Maximum-elv.

Az előadásokon ténylegesen elhangzottak rövid leírása

1. előadás (2015. szeptember 7.).

Közönséges differenciálegyenlet-rendszer fogalma. A megoldás definíciója. Lemma az ekvivalens integrálegyenletről (bizonyítással). A Gronwall lemma (bizonyítással). A Lipschitz feltétel. Az unicitás tétel bizonyítása. Példák: $dx/dt=x$, $dx/dt=3x^{2/3}$.

1. gyakorlat (2015. szeptember 11., Dr. Tóth János). Közönséges differenciálegyenletek megoldása számítógépes módszerekkel.

2. előadás (2015. szeptember 14.).

Az egzisztencia és unicitás tétel bizonyítása (a Banach-féle fix pont tétel segítségével). Hasonló tételek (Peano, Cauchy) kimondása. A megoldás folytathatósága.

3. előadás (2015. szeptember 18.). Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek. Szétválasztható, lineáris egyenlet analitikus megoldása. Közelítő megoldási módszerek (NEWTON, EULER, PICARD, izoklinák).

2. gyakorlat (2015. szeptember 18.). Példák elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldására integrálással (szétválasztható, lineáris), közelítő megoldási módszerekkel (NEWTON, EULER, PICARD, izoklinák).

4. előadás (2015. szeptember 21.).

n -ed rendű differenciálegyenletek visszavezetése n -dimenziós rendszerekre (az „Átviteli Elv”). Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek. Példák (harmonikus oszcillátor, Frenet formulák, párhuzamos eltolás – Christoffel szimbólumok. A megoldások folytathatósága (bizonyítással). A megoldások lineáris függetlensége.

5. előadás (2015. szeptember 25.).

Helyettesítés elsőrendű differenciálegyenletekben – visszavezetés szétválaszthatóra, lineárisra (homogén fokszámú, Bernoulli). Ortogonális, izogonális trajektóriák. Egzakta differenciálegyenletek. Multiplikátor módszer. A lineáris egyenlet megoldó képletének bizonyítása.

3. gyakorlat (2015. szeptember 25.). Az $(x+y)y'=y$ egyenlet megoldása 3-féle módszerrel (homogén fokszámú, $\mu(y)$ alakú multiplikátor, lineáris y független változóval).

6. előadás (2015. szeptember 28.).

Lineáris változó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. Homogén eset. Alaprendszer, alapmátrix, Wronski determináns. Inhomogén eset. Egy partikuláris megoldás megkeresése az állandók variálásával. Megoldó képlet.

Lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek. Mátrixfüggvények. Az $\exp(At)$ alapmátrix. Megoldóképlet.

7. előadás (2015. október 2.).

Másodrendű differenciálegyenletek.

Hiányos másodrendűek visszavezetése elsőrendűre.

Lineáris másodrendű egyenletek. Elmélet – visszavezetés 2-dimenziós rendszerre. Változó együtthatós egyenletek (a megoldás struktúrája, az állandók variálásának módszere). Állandó együtthatós egyenletek. Próba-függvény módszer.

4. gyakorlat (2015. október 2.). Az $y''+y'=2\exp(-x)$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$ kezdeti érték probléma megoldása 3-féle módszerrel (visszavezetés elsőrendűre, állandó együtthatós lineáris, állandók variálása).

8. előadás (2015. október 5.).

Autonóm egyenletek, rendszerek. A pályák (trajektóriák) nem metszik egymást. Fáziskép fogalma.

Egydimenziós autonóm rendszer (egyenlet). Pályák ábrázolása a jobb oldal grafikonja alapján. Az egyenlet megoldása (szétválasztható).

Kétdimenziós eset. Homogén lineáris rendszer megoldása, fázisképének ábrázolása. Valós sajátértékek esete. Nyereg, csomópont.

9. előadás (2015. október 9.).

Homogén lineáris rendszer megoldása, fázisképének ábrázolása. Komplex konjugált sajátértékek esete. Centrum, fókusz.

Másodrendű lineáris változó együtthatós egyenletek. A homogén egy nem triviális megoldása ismeretében visszavezetés elsőrendű egyenletre. Az állandók variálása módszer levezetése ebben a speciális esetben.

5. gyakorlat (2015. október 9.).

Minta zárthelyi feladatsor megoldása.

10. előadás – tantermi gyakorlat (2015. október 12.).

Feladatmegoldás a 9. előadás témáiból (fáziskép, általános megoldás komplex gyökök esetében, változó együtthatós lineáris rendszerek).

11. előadás – 1. zárthelyi dolgozat (2015. október 16.).

6. gyakorlat (2015. október 16.).

A zárthelyi dolgozat feladatainak megoldása.

12. előadás (2015. október 19.).

Nemlineáris síkbeli autonóm rendszerek. Lokális fázisképek. Poincaré tétele. Kolmogorov, Volterra-Lotka rendszerek. Ragadozó-zsákmány modell.

2015. október 23-án a nemzeti ünnep miatt elmaradt az előadás, gyakorlat.

13. előadás – 1. pótló, javító zárthelyi dolgozat (2015. október 26.).

14. előadás (2015. október 30.).

Ljapunov stabilitás. Definíciók. Tétel (bizonyítással) stabilitás a lineáris közelítés alapján. Routh-Hurwitz kritérium (csak kimondás). Szükséges feltétel: a karakterisztikus egyenlet együtthatói azonos előjelűek.

7. gyakorlat (2015. október 30.).

Példa síkbeli autonóm rendszer fázisképének meghatározására. Populáció dinamika. két versengő faj modellje.

15. előadás (2015. november 2.).

A kezdeti értékektől való folytonos, differenciálható függés. Variációs rendszer. Paraméterektől való függés.

16. előadás (2015. november 6.).

Ljapunov függvények definíciója, definitása. Ljapunov stabilitási, egyenletes stabilitási tétele (bizonyítással). Ljapunov aszimptotikus stabilitási tétele (csak kimondás). Szemléltetés síkbeli lineáris autonóm rendszereken.

8. gyakorlat (2015. november 6.).

Ljapunov stabilitás vizsgálata a lineáris közelítés alapján. A tétel, a Routh-Hurwitz kritérium alkalmazása példákon (köztük a gőzgép matematikai modellje).

17. előadás (2015. november 9.).

Ljapunov instabilitás. Instabilitási tételek kimondása, bizonyítása. Szemléltetés síkbeli lineáris autonóm rendszereken.

18. előadás (2015. november 13.).

Példa (az űrhajózás témaköréből) a variációs rendszer meghatározására, használatára. Közben többszörös sajátértékek esete lineáris állandó együtthatós rendszerekre.

9. gyakorlat (2015. november 13.).

Tipikus egy kodimenziós bifurkációk (nyereg-csomó, Andronov-Horf). Bifurkációs diagramok.

19. előadás. (2015. november 16.)

Strukturális stabilitás fogalma (autonóm differenciálegyenlet-rendszerek esetén).

Az egydimenziós eset teljes vizsgálata. A strukturálisan stabilis egyenletek osztályozása: páros számú (0, 2, 4, ...) nem kritikus egyensúlyi helyzet a körön. A strukturálisan stabilis egyenletek nyílt, mindenütt sűrű halmazt alkotnak a C^1 függvényterben.

Kompakt kétdimenziós sokaságok (rövid bevezetés).

20. előadás (2015. november 20.).

Autonóm differenciál-egyenletrendszerek a gömbön (zárt pályák – Dulac kritérium bizonyítással, Peixoto tétel – csak kimondás), a tóruszon (benne Arnold a „Macska automorfizmusa”).

10. gyakorlat (2015. november 20.).

Próba 2. zárthelyi megoldása.

21. előadás (2015. november 23.).

2. zárthelyi dolgozat.

22. előadás (2015. november 30.).

A 2. zárthelyi dolgozat példáinak megoldása.

23. előadás (2015. december 4.).

Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Másodrendű egyenletek osztályozása. A hővezetés differenciálegyenlete. Fourier módszer.

11. gyakorlat (2015. november 20.).

Példamegoldás egy dimenziós hővezetés egyenletek témájában.

24. előadás (2015. december 7.)

Példa korábbi vizsgadolgozat megoldása. Benne néhány nem érintett téma (Laplace transzformáció, elsőrendű parciális egyenletek).

25. előadás (2015. december 11.)

2. pótvizsga zárthelyi dolgozat.