

Az előadásokon ténylegesen elhangzottak rövid leírása

1. előadás (2015. szeptember 8.).

Valós számok axiomatikus bevezetése (Farkas Jegyzet alapján).

Természetes, egész, racionális, komplex számok. Példák a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás létére, nemlétére (síkvektorok, halmazműveletek).

Valós számsorozat konvergenciájának definíciója.

Topológikus tér definíciója. Konvergencia topológikus terekben. Konvergencia „elfajult” topológiák (minden részhalmaz nyílt, csak az üres halmaz és a tér nyílt) esetén.

2. előadás (2015. szeptember 9.).

Cantor-féle egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres (bizonyítással a Dedekind axiómából).

Numerikus sorozatok. Konvergencia, korlátosság, monotonitás definíciók. Tételek bizonyítással (1. Minden konvergens sorozat korlátos. 2. Minden monoton, korlátos sorozat konvergens.).

Példák háromféle sorozat megadási módra: képlettel – $(n+1)/n$, $(-1)^n$, szövegesen – gyök 2 n tizedes jegyű közelítése, rekurzíven – Fibonacci sorozat, gyök 2 érintő módszerrel.

Metrikus tér definíciója.

3. előadás (2015. szeptember 15.).

Konvergens numerikus sorozatok összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Szorzás bizonyítással.

A részsorozat fogalma. A Cauchy konvergencia definíciója. Tételek bizonyítással (1. Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata. 2. A valós számok körében a konvergencia és a Cauchy konvergencia ekvivalenciája.). Visszatérés a 2. előadás példáira.

Egyebek. Végtelenhez tartó sorozat definíciója. Utalás az „e” szám különböző bevezetési módjaira.

Konvergencia metrikus terekben. Teljes metrikus tér definíciója. Példák (valós, racionális számok).

4. előadás (2015. szeptember 22.).

Egyváltozós valós függvények. Határérték, folytonosság – definíciók (ϵ, δ – sorozatos, pontban, intervallumon, stb.).

Kompaktság (sorozat kompaktság) definíciója. Tétel (bizonyítással), hogy $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ -ben a kompaktság ekvivalens a korlátossággal, zártsággal.

Kompakton megadott folytonos valós függvények korlátosak, van maximumuk, minimumuk (Weierstrass tételei bizonyítással). Az $[a,b]$ zárt intervallum speciális esete.

A folytonos függvények tere (mint metrikus tér).

A Banach-féle fixpont tétel (bizonyítással, az egyértelműség nélkül).

5. előadás (2015. szeptember 23.).

Egyváltozós valós függvények deriválása. Két ekvivalens definíció. Példa: $f(x)=x^3$. Fermat tételének bizonyítása (a szélsőérték helyen a derivált nulla). Középértéktételek bizonyítással (Rolle, Lagrange, Taylor formula).

6. előadás (2015. szeptember 29.).

A deriválás alkalmazásai. Függvényvizsgálat – következtetések az $f(x)=0$ (gyökök), $f'(x)=0$ (stacionárius pontok, lehetséges maximum, minimum helyek), $f''(x)=0$ (lehetséges inflexiós pontok) feltételekből. Monotonitás. Példa (hajtogatott doboz térfogata mikor maximális, $V(x)=x(4-2x)^2$ függvény vizsgálata).

7. előadás (2015. szeptember 30.).

Lokális függvényvizsgálat összefoglalása.

Deriválási szabályok (összeadás, kivonás, szorzás, osztás – szorzás bizonyítással).

Az összetett függvény fogalma, deriválása.

Az inverz függvény fogalma, létezése, grafikonja, deriválhatósága, deriváltja.

Példák $f(x)=x^n$, $n=-1, 0, 1, 2, 3$.

8. előadás (2015. október 6.).

Elsőrendű közönséges differenciálegyenlet fogalma. Az egzisztencia és unicitás (létezés és egyértelműség) tétel kimondása (egyelőre bizonyítás nélkül).

Az exponenciális függvény bevezetése, mint az $y'=y$, $y(0)=1$ kezdeti érték feladat megoldása. A megoldás Taylor sora. Az $e^{a+b}=e^a e^b$ azonosság bizonyítása. Az exponenciális függvény grafikonja. A logaritmus ($\ln$) függvény (grafikon, derivált, azonosságok, stb.).

A $\cosh$ (ch) és $\sinh$ (sh) függvények és inverz függvényeik (arsh , arch) definíciója, deriváltak, azonosságok, grafikonok, stb. A hiperbola paraméterezése. A láncgörbe.

9. előadás (2015. október 7.). Tantermi gyakorlat.

Minta zárthelyi dolgozat megoldása. Benne feladatok az első 4 hét anyagából (sorozatok, indukciós bizonyítás, derivált definíciója, függvényvizsgálat).

10. előadás (2015. október 13.).

Ismétlés (exponenciális, hiperbolikus függvények). A $\cos$ és $\sin$ függvények és inverz függvényeik ($\arcsin$, $\arccos$) definíciója (sorfejtéssel), deriváltak,

azonosságok, grafikonok, stb. A kör paraméterezése. További elemi függvények ($\tanh$, $\tan$) definíciója, Maclaurin sora, grafikonja, deriváltja, inverze, stb. Az $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ függvények Maclaurin sora.

A Banach-féle fixpont tétel (az egyértelműség bizonyítása).

11. előadás (2015. október 14.).

Cauchy-féle közéérték tétel.

Határértékek számítása a függvények Taylor sora segítségével.

A L'Hospital szabály (bizonyítással – véges pontban „ $0/0$ ”, illetve „ ∞/∞ ” esetek).

Példák alkalmazhatóságára, illetve ellenpéldák.

12. előadás (2015. október 15.).

1. zárthelyi dolgozat.

13. előadás (2015. október 20.).

Zárt intervallumon folytonos függvények (Bolzano, Cantor tételei).

Gyökkeresési módszerek (intervallum felezés, iteráció – Banach-féle fix pont tétel alapján, Newton). Példa ($x^2-2=0$).

A normált, Banach terek definíciója. Példák ilyen terekre.

14. előadás (2015. október 21.).

A határozatlan integrál. Tulajdonságok. Elemi függvények integráljai. Integrálási módszerek (parciális, $f \wedge n \cdot f'$, f/f').

Bevezetés a mértékelméletbe. 0-mértékű halmaz fogalma. Létezik nem mérhető halmaz (bizonyítással).

15. előadás (2015. október 27.).

Tantermi gyakorlat (előadó Dr. Kovács Edith).

16. előadás (2015. november 3.).

A határozatlan integrál. Racionális törtfüggvények integrálása. Helyettesítés (általában, példák trigonometrikus, irracionális esetekre).

A Riemann integrál definíciója (zárt intervallumon megadott korlátos függvényre alsó, felső összegek segítségével).

17. előadás (2015. november 4.).

Folytonos, monoton függvények Riemann integrálhatók (bizonyítással). Riemann-Lebesgue tétel (bizonyítás nélkül). Integrálközép tételek. Az integrálás alaptétele, Newton-Leibniz formula. Utalások a Newton-Leibniz formula általánosítására (potenciálmélet, Gauss-Osztrogradszkij tétel, Stokes tétel; külső – differenciál formák).

18. előadás (2015. november 10.).

Határozott integrál, a Newton-Leibniz formula (parciális integrálás, helyettesítés). Impropius Riemann integrál. A Riemann integrál matematikai alkalmazásai (ívhossz, forgástest térfogata, felszíne). Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek.

19. előadás (2015. november 11.).

Szétválasztható, lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenlet analitikus megoldása. Az integrálgörbék ábrázolása.

A differenciálegyenletek egzisztencia és unicitás tételének bizonyítása (átírás integrálegyenletre és a Banach-féle fix-pont tétel alapján).

20. előadás (2015. november 18.).

Próba 2. zárthelyi dolgozat megoldása.

21. előadás (2015. november 24.).

Tantermi gyakorlat (előadó Dr. Kovács Edith).

22. előadás (2015. november 26.).

2. zárthelyi dolgozat.

23. előadás (2015. december 1.).

Numerikus sorok. Konvergencia, abszolút konvergencia. Pozitív tagú sorok. Majoráns, minoráns kritérium. Gyök-hányados kritérium. Integrál kritérium. Váltakozó előjelű sorok.

24. előadás (2015. december 2.).

Sorok elemeinek átcsoportosíthatósága.

A sorösszeg általánosítása. Ábel módszere.

Hilbert tér definíciója. Parallelogramma szabály. A $C_{[a,b]}^0$ nem Hilbert tér bizonyítása.

25. előadás (2015. december 8.).

Minta írásbeli vizsga megoldása (benne feladatok az integrálszámítás további alkalmazására, sorösszeg kiszámításra, stb.).

26. előadás (2015. december 9.).

Bevezetés a mértékelméletbe. Lebesgue-féle kiterjesztési tétel, Lebesgue mérték R^n terekben, Lebesgue integrál. Megjegyzések, példák a Riemann, Lebesgue integrál témában. L^2 , L^p terek.